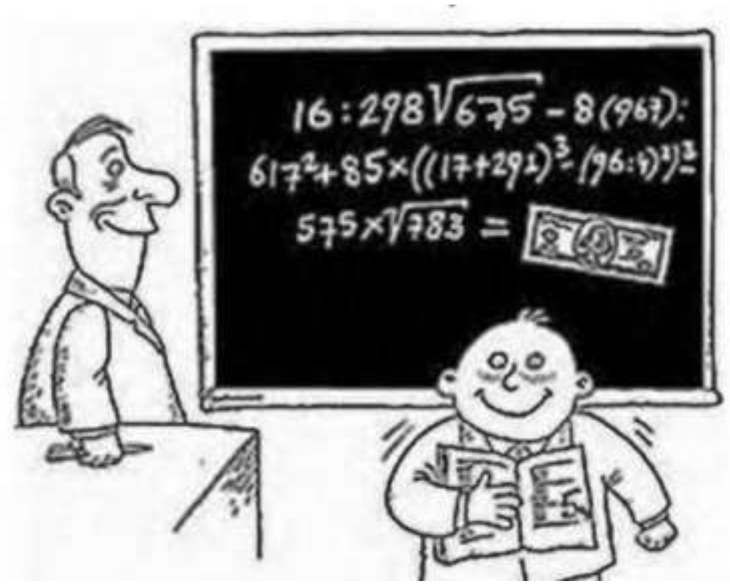
НЕСТАНДАРТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ



Подготовили:

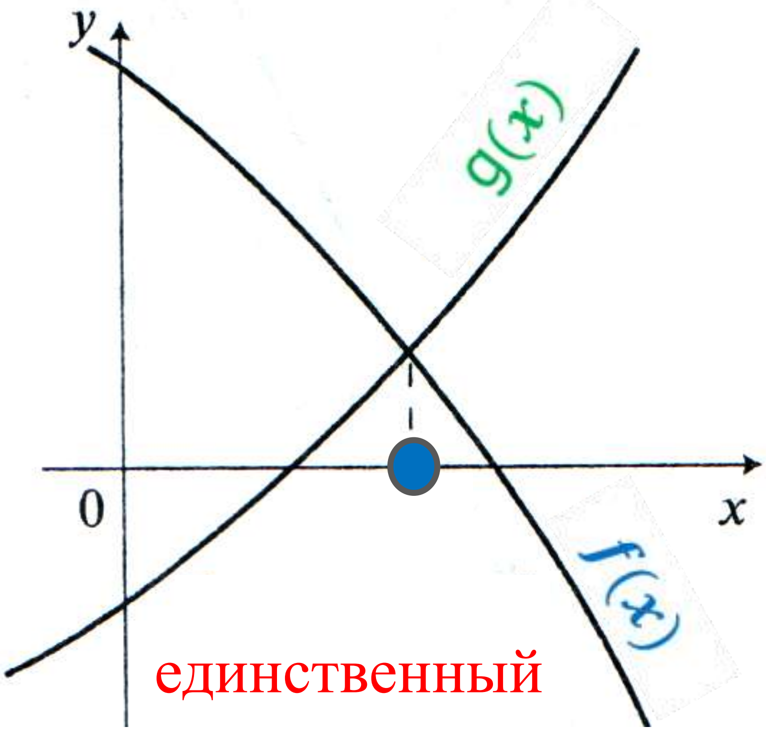
директор лицея №86 *Большакова О. В.*

учителя математики лицея №86

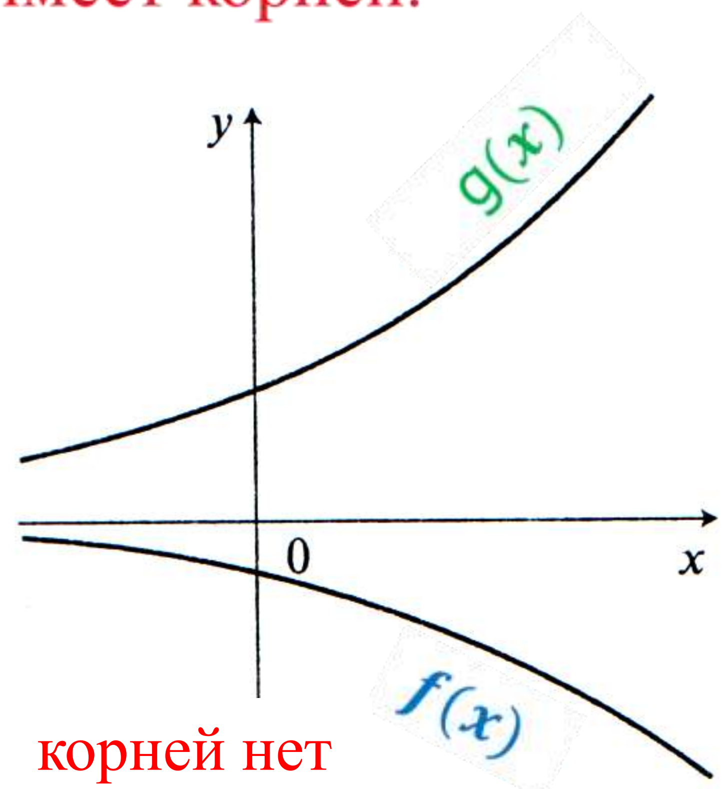
Карпунина Е. В., Кукушкина А. В.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МОНОТОННОСТИ НЕПРЕРЫВНОЙ ФУНКЦИИ

Если функция $f(x)$ убывает, а $g(x)$ возрастает на промежутке X, то уравнение $f(x) = g(x)$ либо имеет один корень на промежутке X и тогда можно найти его подбором, либо не имеет корней.



единственный
корень

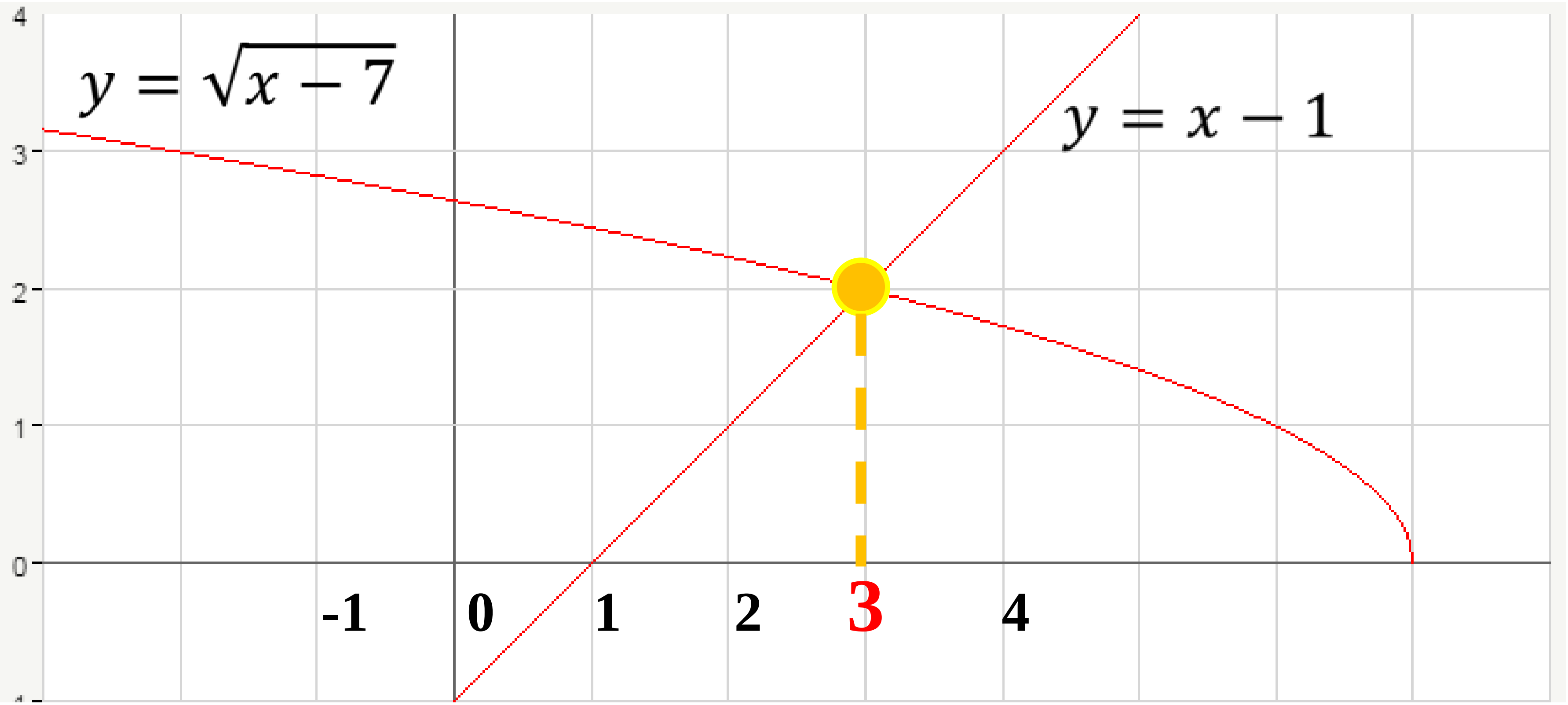


корней нет

№1. Решить уравнение: $\sqrt{7-x} = x-1$

Обязательно ли возводить обе части в квадрат?

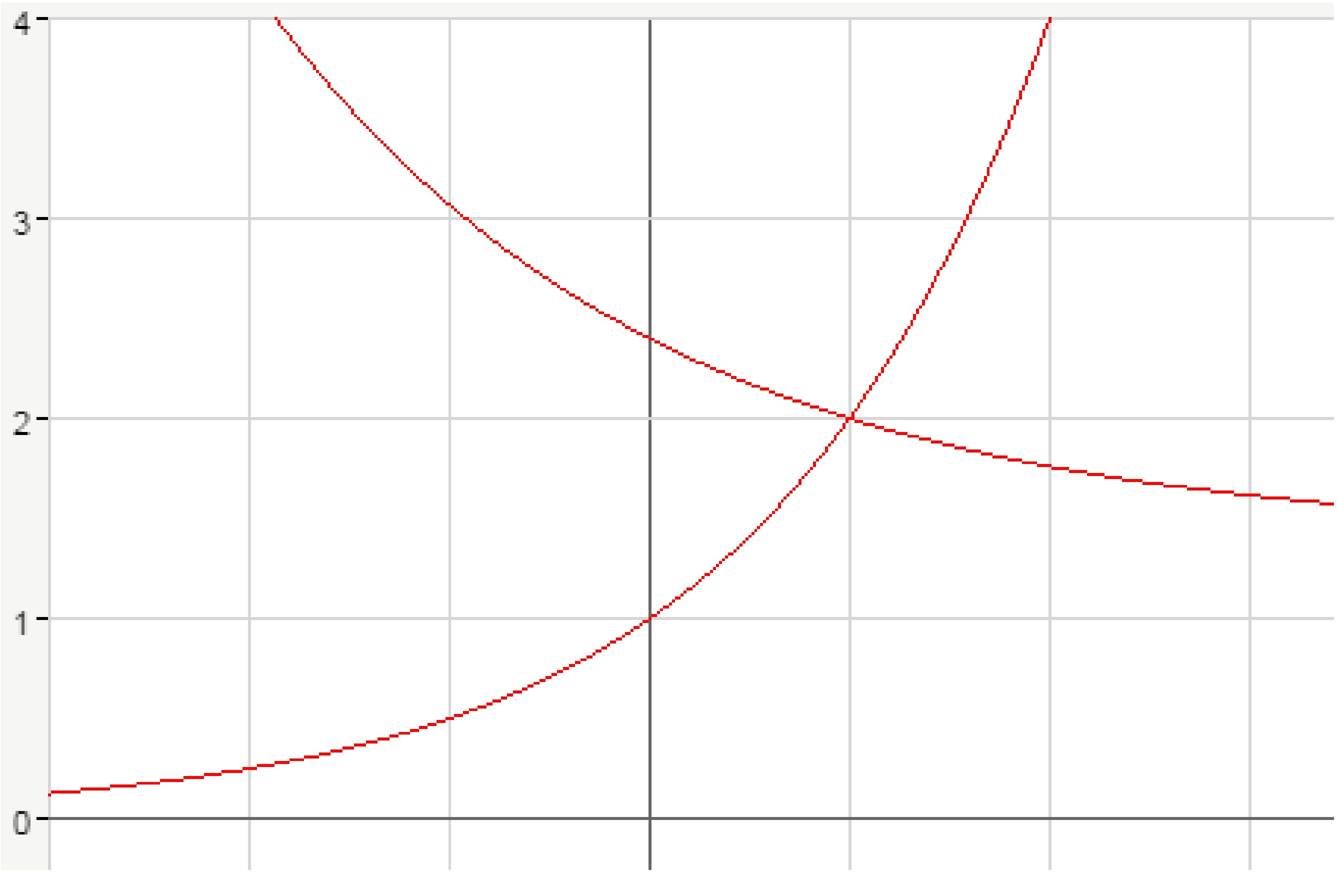
№1. Решить уравнение: $\sqrt{7-x} = x - 1$



Ответ: $x = 3$

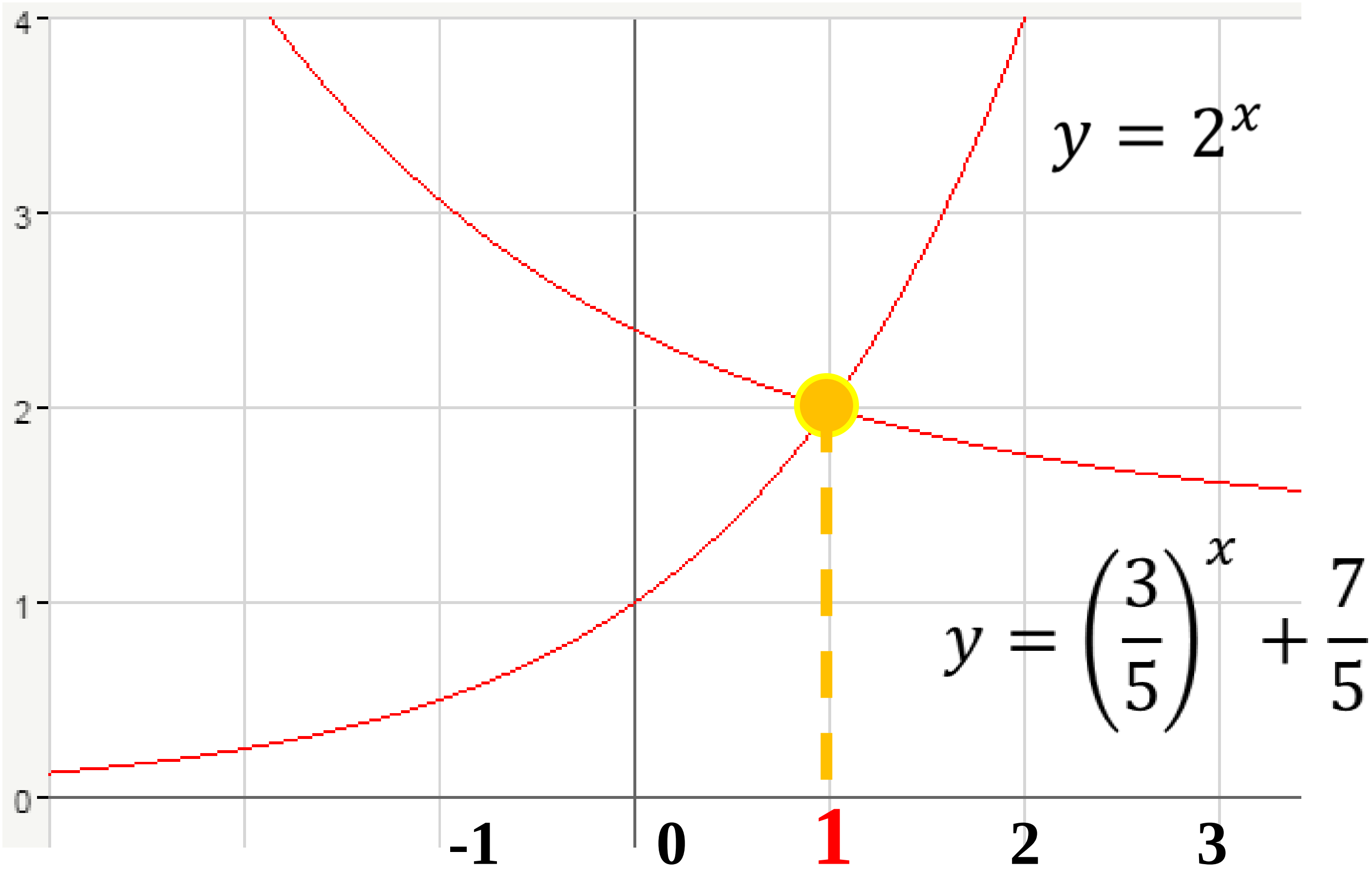
№2. Решить уравнение:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x + \frac{7}{5} = 2^x$$



№2. Решить уравнение:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x + \frac{7}{5} = 2^x$$



№2. Решить уравнение:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x + \frac{7}{5} = 2^x$$

Функция $y = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \frac{7}{5}$ **убывает** на **R**

Функция $y = 2^x$ **возрастает** на **R**

Проверка показывает, что $\boldsymbol{x = 1}$ корень

Ответ: $x = 1$

№3. Решить уравнение:

$$6^x + 8^x = 10^x$$

Функция $y = 6^x + 8^x$ **возрастает** на **R**

Функция $y = 10^x$ **возрастает** на **R**

Делим обе части уравнения **на 10^x**

№3. Решить уравнение:

$$6^x + 8^x = 10^x$$

$$\left(\frac{6}{10}\right)^x + \left(\frac{8}{10}\right)^x = 1$$

Функция $y = 0{,}6^x + 0{,}8^x$ **убывает** на **R**

Функция $y = 1$ **постоянна** на **R**

Проверка показывает, что x = 2 является корнем уравнения:

$$\left(\frac{6}{10}\right)^2 + \left(\frac{8}{10}\right)^2 = 0{,}36 + 0{,}64 = 1$$

Функция $f(x) = \left(\frac{6}{10}\right)^x + \left(\frac{8}{10}\right)^x$,

стоящая в левой части уравнения, **убывает** на множестве действительных чисел,
g(x)=1 – **постоянная** функция, следовательно,
x = 2 единственный корень уравнения.

Ответ: $x = 2$

Задание для самостоятельной работы:

Решите уравнение:

$$125 \cdot 0{,}25^{x} = (x+1)^{3}$$

Задание для самостоятельной работы:

Решите уравнение:

$$125 \cdot 0{,}25^x = (x+1)^3$$

Ответ: $x = 1{,}5$

№4. Решить уравнение:

$$\sqrt[4]{x-1}+2\sqrt[3]{3x+2}=4+\sqrt{3-x}$$

ОДЗ: $\boldsymbol{x\in[1;3]}$

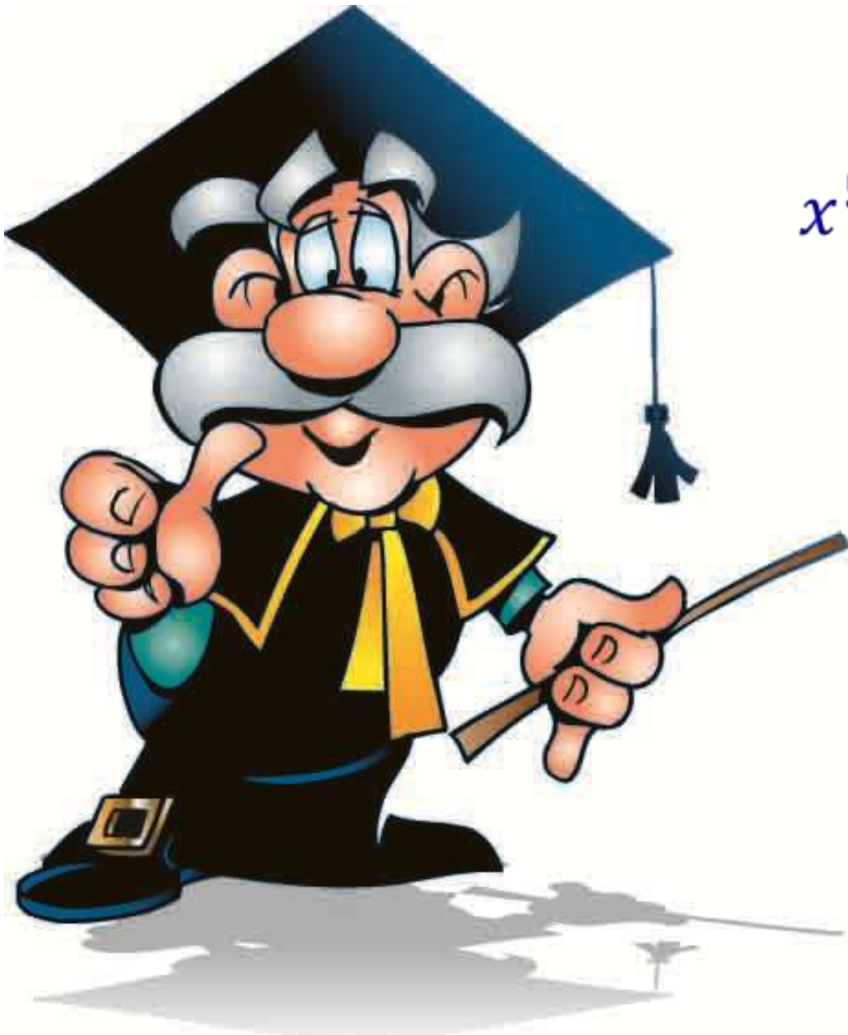
Функция $y=\sqrt[4]{x-1}+2\sqrt[3]{3x+2}$ **возрастает** на $[1;3]$

Функция $y=4+\sqrt{3-x}$ **убывает** на $[1;3]$

Проверка показывает, что $\boldsymbol{x=2}$ корень

Ответ: $x=2$

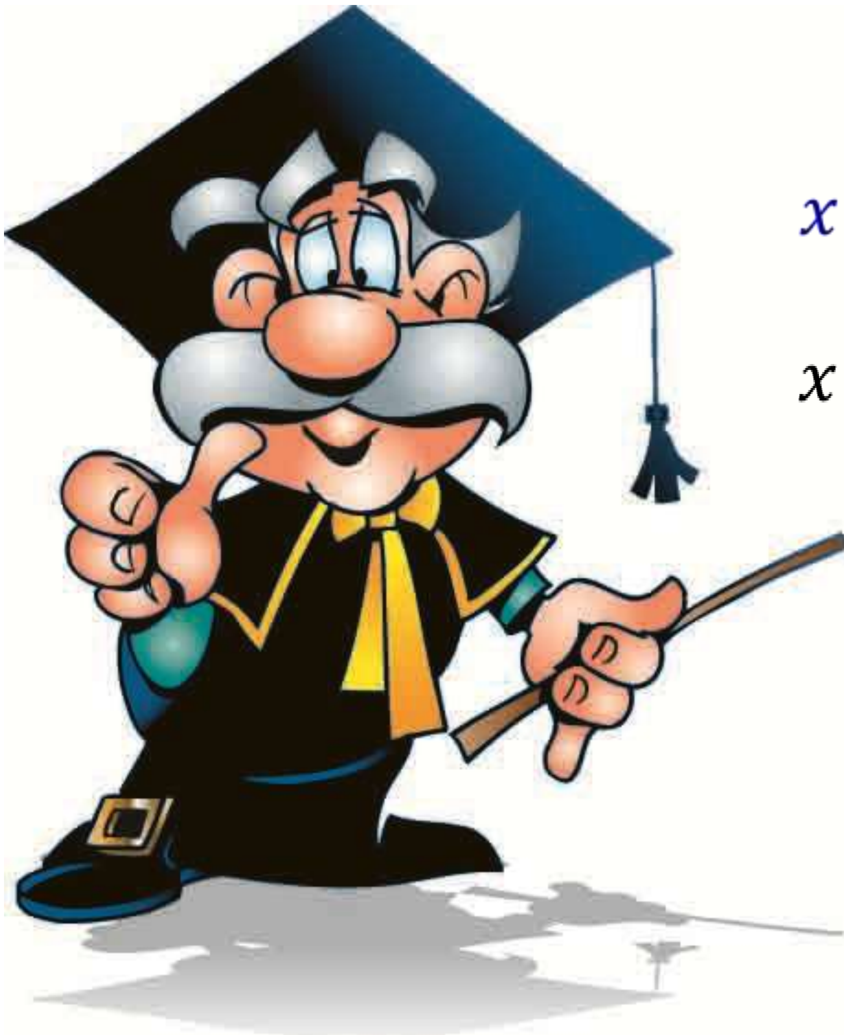
Задание для самостоятельной работы:



Решите уравнение:

$$x^5 + x^3 - \sqrt{1 - 3x} + 4 = 0$$

Задание для самостоятельной работы:



Решите уравнение:

$$x^5 + x^3 - \sqrt{1-3x} + 4 = 0$$

$$x^5 + x^3 + 4 = \sqrt{1-3x}$$

Ответ: $x = -1$

№5. Решить уравнение:

$$\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4} = \sqrt[4]{2x - 1}$$

ОДЗ: $x \in [0,5;\ +\infty)$

Можно заметить, что $x = 1$ **корень** уравнения, **но**

Функция $y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}$ **возрастает** на $[0,5;\ +\infty)$

Функция $y = \sqrt[4]{2x - 1}$ **возрастает** на $[0,5;\ +\infty)$

№5. Решить уравнение:

$$\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4} = \sqrt[4]{2x - 1}$$

Как доказать, что других корней нет?

№5. Решить уравнение:

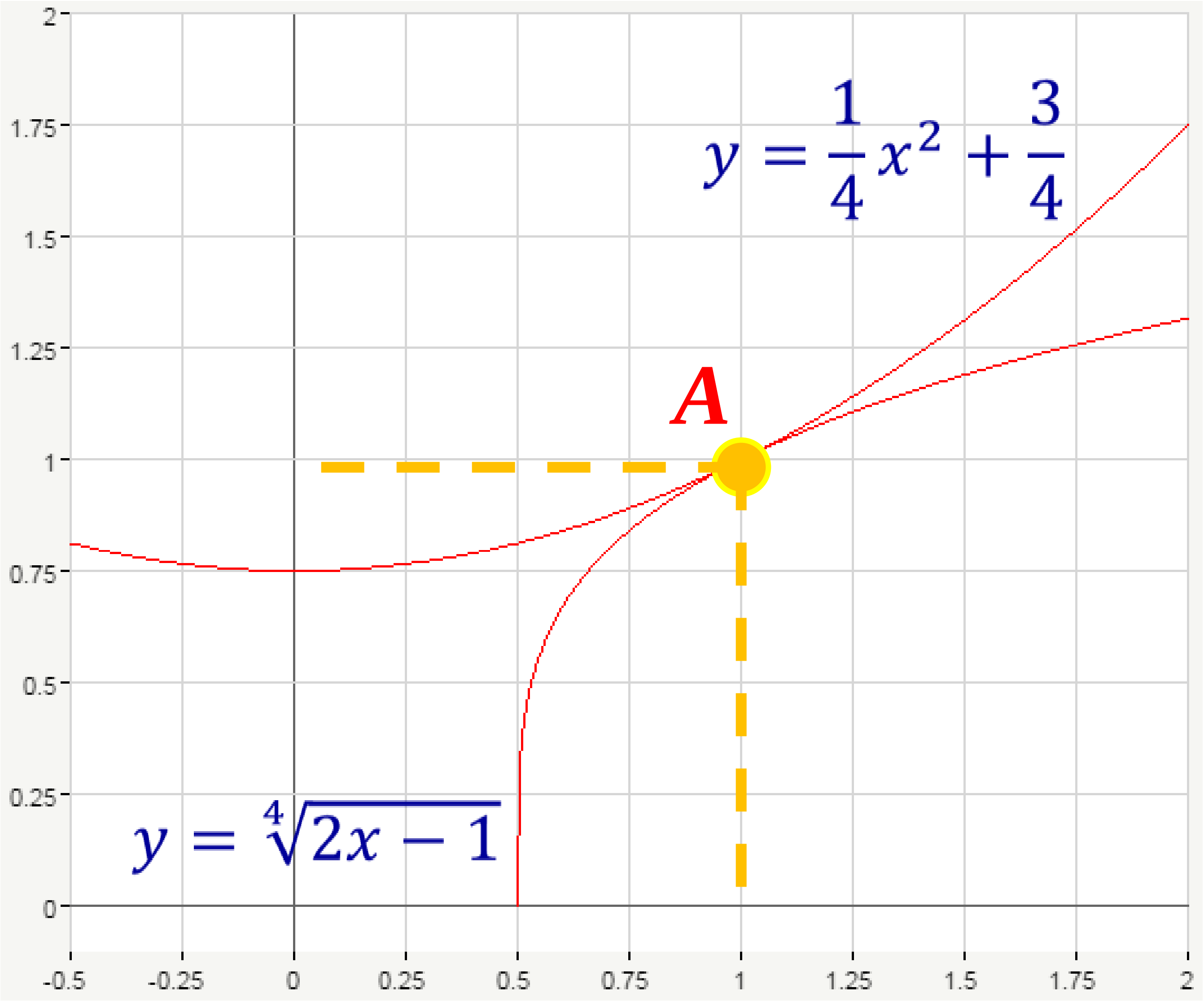
$$\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4} = \sqrt[4]{2x-1}$$

Как доказать, что других корней нет?

Строим графики функции:

$$y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4} \quad \text{и} \quad y = \sqrt[4]{2x-1}$$

Есть ли другие общие точки в окрестности точки *A (1; 1)*?

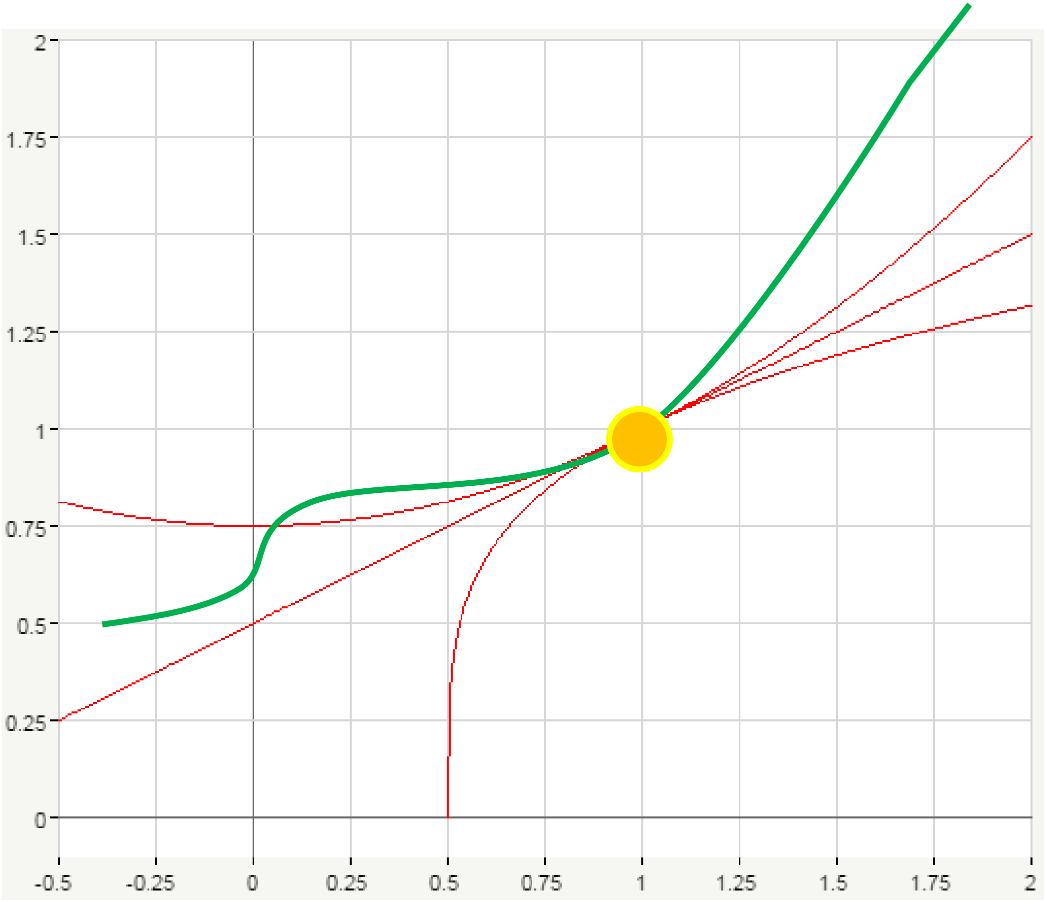


Найдем угловые коэффициенты касательных к графикам функций

$y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}$	$y = \sqrt[4]{2x-1}$
$y'(x) = \frac{1}{2}x$	$y'(x) = \frac{1}{2\sqrt[4]{(2x-1)^3}}$
$y'(1) = \frac{1}{2}$	$y'(1) = \frac{1}{2}$

Вывод: **графики** функций имеют **общую касательную** в точке (1; 1)

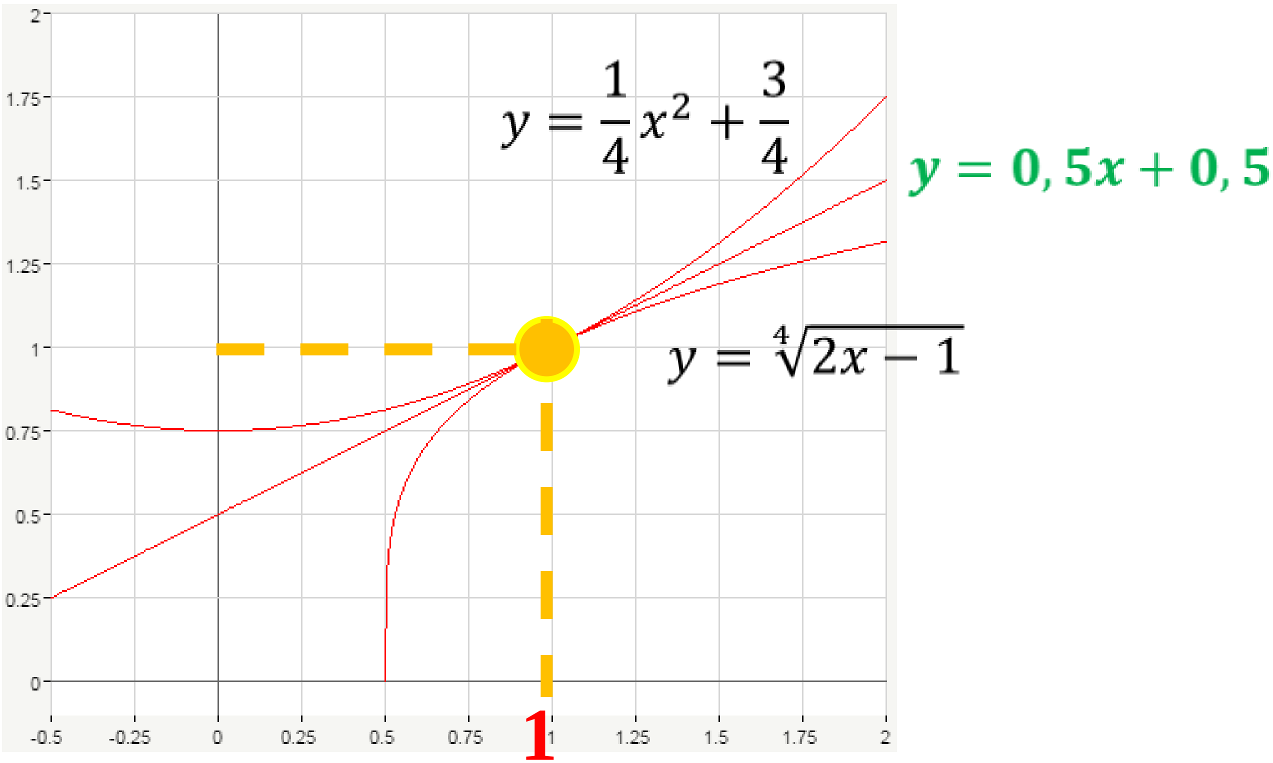
Достаточно ли последнего условия?



Вывод: необходимо знать **характер выпуклости** функции

№5. Решить уравнение:

$$\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4} = \sqrt[4]{2x - 1}$$

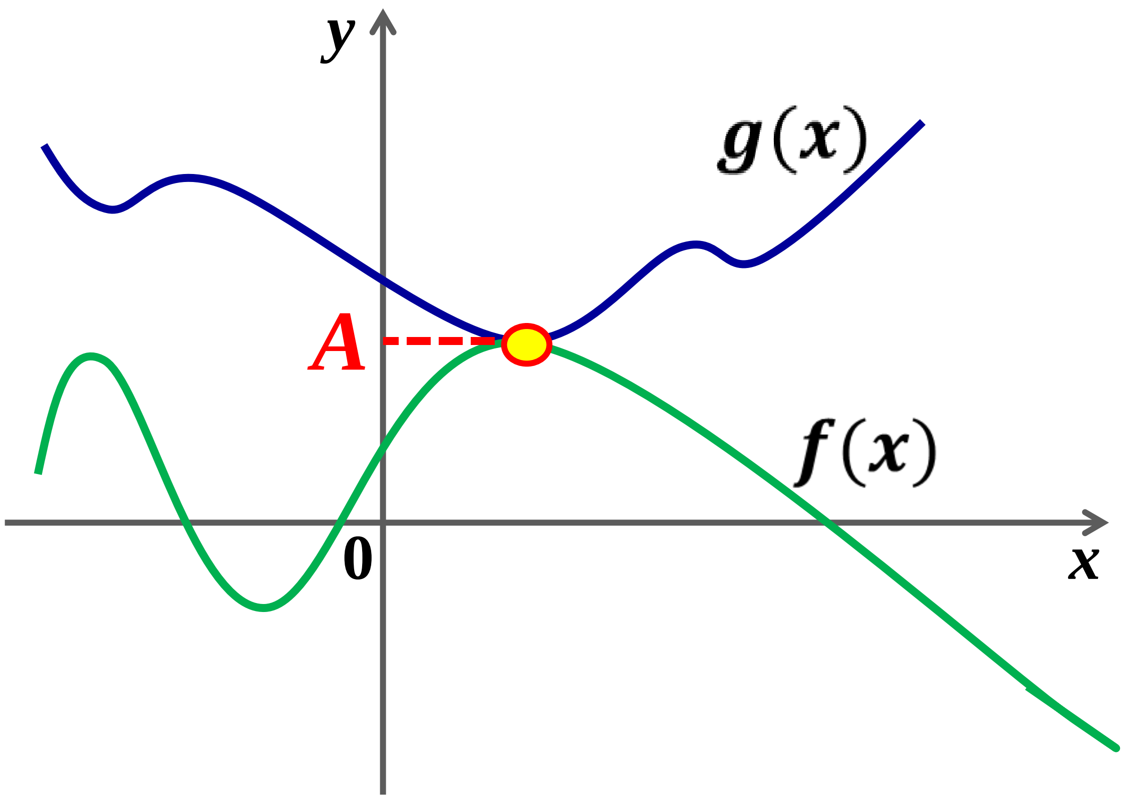


Ответ: $x = 1$

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОГРАНИЧЕННОСТИ ФУНКЦИИ

Если функция $y = f(x)$ **ограничена сверху** на промежутке X и $f_{\text{наиб}} = A$, а функция $y = g(x)$ **ограничена снизу** и $g_{\text{наим}} = A$, то уравнение $f(x) = g(x)$ **равносильно** системе уравнений:

$$\begin{cases} f(x) = A \\ g(x) = A \end{cases}$$



№6. Решить уравнение:

$$\sqrt{9+(5x-1)^2}=3-\cos^2\frac{15\pi x}{2}$$

	Левая часть	*Правая часть*
1.	$\sqrt{9+(5x-1)^2}$	$3-\cos^2\frac{15\pi x}{2}$
2.	$(5x-1)^2\geq 0$ $\mathbf{9+(5x-1)^2\geq 9}$ $\mathbf{\sqrt{9+(5x-1)^2}\geq 3}$	$\cos^2\frac{15\pi x}{2}\geq 0$ $\mathbf{-\cos^2\frac{15\pi x}{2}\leq 0}$ $\mathbf{3-\cos^2\frac{15\pi x}{2}\leq 3}$

№6. Решить уравнение:

$$\sqrt{9+(5x-1)^2} = 3 - \cos^2\frac{15\pi x}{2}$$

	Левая часть	*Правая часть*
2.	$\sqrt{\mathbf{9+(5x-1)^2}} \geq \mathbf{3}$	$3-\cos^2\frac{15\pi x}{2} \leq \mathbf{3}$
3.	$\sqrt{9+(5x-1)^2} \geq 3$	$3-\cos^2\frac{\quad}{2} \leq 3$

№6. Решить уравнение:

$$\sqrt{9+(5x-1)^2} = 3-\cos^2\frac{15\pi x}{2}$$

$$\begin{cases} \sqrt{9+(5x-1)^2} = 3 \\ 3-cos^2\dfrac{15\pi x}{2} = 3 \end{cases}$$

Решаем первое уравнение:

$$\sqrt{9+(5x-1)^2} = 3$$

$$(5x-1)^2 = 0$$

$$x = 0{,}2$$

№6. Решить уравнение:

$$\sqrt{9+(5x-1)^2} = 3 - \cos^2\frac{15\pi x}{2}$$

$$\begin{cases} \sqrt{9+(5x-1)^2} = \mathbf{3} \\ 3 - cos^2\frac{15\pi x}{2} = \mathbf{3} \end{cases}$$

Проверяем корень $x = 0,2$ для второго уравнения

$$3 - \cos^2\frac{15\pi \cdot \mathbf{0,2}}{2} = 3 - \cos^2\frac{3\pi}{2} = 3 - 0 = 3$$

№6. Решить уравнение:

$$\sqrt{9+(5x-1)^2} = 3 - \cos^2\frac{15\pi x}{2}$$

$$\begin{cases} \sqrt{9+(5x-1)^2} = 3 \\ 3 - cos^2\dfrac{15\pi x}{2} = 3 \end{cases}$$

Вывод: $x = 0{,}2$ корень обоих уравнений

Ответ: $\mathbf{x = 0,2}$

№7. Решить уравнение:

$$12+12x+4x^2=\left(\sin\frac{4\pi x}{3}+\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{3}-\sin\frac{4\pi x}{3}\right)$$

	Левая часть	*Правая часть*
1.	$(2x+3)^2+3$	$3-\sin^2\frac{4\pi x}{3}$
2.		$3-\sin^2\frac{4\pi x}{3}$
	$(2x+3)^2\geq 0$	$0\leq\sin^2\frac{4\pi x}{3}\leq 1$

№7. Решить уравнение:

$$12 + 12x + 4x^2 = \left(\sin\frac{4\pi x}{3} + \sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{3} - \sin\frac{4\pi x}{3}\right)$$

	Левая часть	*Правая часть*
2.	$(2x+3)^2 + 3 \geq \mathbf{3}$	$2 \leq 3 - \sin^2\frac{4\pi x}{3} \leq \mathbf{3}$
3.	$\boldsymbol{f}_{\text{наим}} = \mathbf{3}$	$\boldsymbol{g}_{\text{наиб}} = \mathbf{3}$

№7. Решить уравнение:

$$12+12x+4x^2=\left(\sin\frac{4\pi x}{3}+\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{3}-\sin\frac{4\pi x}{3}\right)$$

$$\begin{cases}(2x+3)^2+3=\mathbf{3}\\ 3-\sin^2\dfrac{4\pi x}{3}=\mathbf{3}\end{cases}$$

№7. Решить уравнение:

$$12+12x+4x^2=\left(\sin\frac{4\pi x}{3}+\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{3}-\sin\frac{4\pi x}{3}\right)$$

$$\begin{cases}(2x+3)^2+3=3\\ 3-\sin^2\dfrac{4\pi x}{3}=3\end{cases}$$

Решаем первое уравнение:

$$(2x+3)^2=0$$

$$2x+3=0$$

$$x=-1{,}5$$

№7. Решить уравнение:

$$12+12x+4x^2=\left(\sin\frac{4\pi x}{3}+\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{3}-\sin\frac{4\pi x}{3}\right)$$

$$\begin{cases}(2x+3)^2+3=3\\ 3-\sin^2\dfrac{4\pi x}{3}=3\end{cases}$$

Проверяем корень $x=-1,5$ для второго уравнения:

$$3-sin^2\frac{4\pi\cdot(-1,5)}{3}=3-sin^2(-2\pi)=3-0=3$$

№7. Решить уравнение:

$$12 + 12x + 4x^2 = \left(\sin\frac{4\pi x}{3} + \sqrt{3}\right) \cdot \left(\sqrt{3} - \sin\frac{4\pi x}{3}\right)$$

$$\begin{cases} (2x+3)^2 + 3 = 3 \\ 3 - \sin^2\dfrac{4\pi x}{3} = 3 \end{cases}$$

Вывод: $x = -1{,}5$ корень обоих уравнений

Ответ: $\boldsymbol{x = -1,5}$

Задание для самостоятельной работы:

Решите уравнение:

$$2\cos x = 5x^2 + 2x + 3$$

Задание для самостоятельной работы:

Решите уравнение:

$$2\cos x = 5x^2 + 2x + 3$$

$$\mathbf{2\cos x \le 2}$$

$$\mathbf{5x^2 + 2x + 3} =$$

$$= 5(x + 0{,}2)^2 + 2{,}8 \ge \mathbf{2{,}8}$$

Ответ: корней нет

№8. Решить уравнение:

$$\sqrt{2+\sin^2 4x} = \sin x - \cos x$$

	Левая часть	*Правая часть*
1.	$\sqrt{2+\sin^2 4x}$	$\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$
2.	$\sin^2 4x \geq 0$ $\mathbf{2+\sin^2 4x \geq 2}$ $\mathbf{\sqrt{2+\sin^2 4x} \geq \sqrt{2}}$	$\mathbf{-1 \leq \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \leq 1}$ $-\sqrt{2} \leq \mathbf{\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}}$

№8. Решить уравнение:

$$\sqrt{2+\sin^2 4x} = \sin x - \cos x$$

	Левая часть	*Правая часть*
2.	$\sqrt{2+\sin^2 4x} \geq \sqrt{\mathbf{2}}$	$-\sqrt{2} \leq \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{\mathbf{2}}$
3.	$\boldsymbol{f}_{\text{наим}} = \sqrt{\mathbf{2}}$	$\boldsymbol{g}_{\text{наиб}} = \sqrt{\mathbf{2}}$

№8. Решить уравнение:

$$\sqrt{2+\sin^2 4x} = \sin x - \cos x$$

$$\begin{cases} \sqrt{2+\sin^2 4x} = \sqrt{2} \\ \sin x - \cos x = \sqrt{2} \end{cases}$$

Решаем первое уравнение:

$$\sqrt{2+\sin^2 4x} = \sqrt{2}$$

$$\sin^2 4x = 0$$

$$\sin 4x = 0$$

$$4x = \pi n, n \in Z$$

$$x = \frac{\pi n}{4}, n \epsilon Z$$

№8. Решить уравнение:

$$\sqrt{2+\sin^2 4x} = \sin x - \cos x$$

$$\begin{cases} \sqrt{2+\sin^2 4x} = \sqrt{2} \\ \sin x - \cos x = \sqrt{2} \end{cases}$$

Решаем второе уравнение:

$$\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$$

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

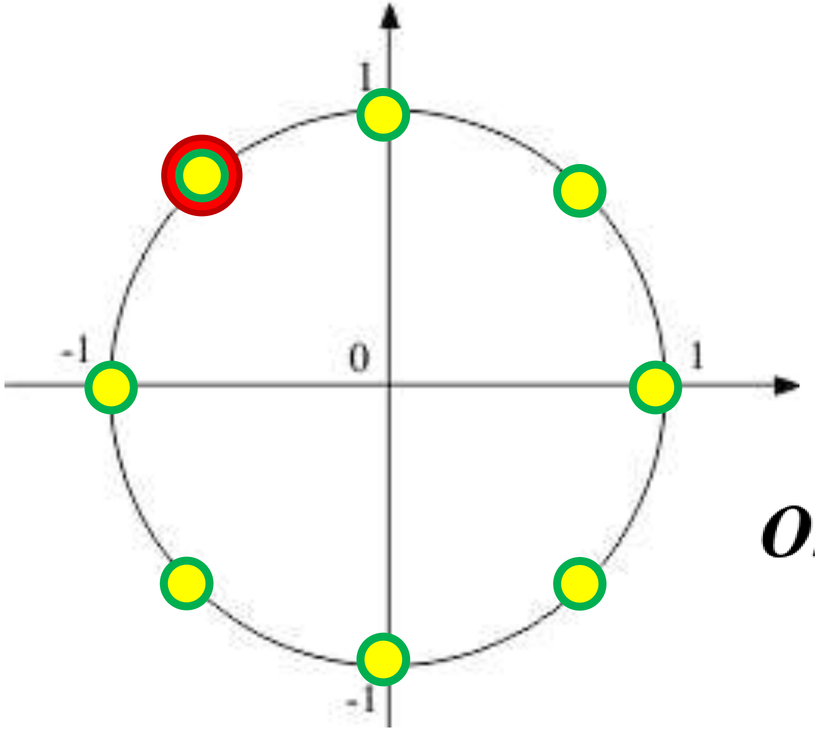
$$x-\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k\epsilon Z$$

$$x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k\epsilon Z$$

№8. Решить уравнение:

$$\sqrt{2+\sin^2 4x} = \sin x - \cos x$$

$$\begin{cases} \sqrt{2+\sin^2 4x} = \sqrt{2} \\ \sin x - \cos x = \sqrt{2} \end{cases} <=> \begin{cases} \boldsymbol{x = \frac{\pi n}{4}}, n\epsilon Z \\ \boldsymbol{x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k}, k\epsilon Z \end{cases}$$



Ответ: $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k\epsilon Z$

№9. Решить уравнение:

$$3x^2 + 3y^2 - 4xy + 6x + 6y + 18 = 0$$

Преобразуем левую часть уравнения:

$$(2x^2 - 4xy + 2y^2) + (x^2 + 6x + 9) + (y^2 + 6y + 9) = 0$$

$$\mathbf{2(x - y)^2 + (x + 3)^2 + (y + 3)^2 = 0}$$

$$\begin{cases} x - y = 0, \\ x + 3 = 0, \\ y + 3 = 0; \end{cases} <=> \begin{cases} x = y, \\ x = -3, \\ y = -3. \end{cases}$$

Ответ: $(-3; -3)$

№12. Найти все значения параметра b, при каждом из которых уравнение имеет решения

$$\sin^2 bx + \cos x + 1 = 0$$

$$\sin^2 bx = -\cos x - 1$$

	Левая часть	*Правая часть*
1.	$\sin^2 bx$	$-\cos x - 1$
2.	$\mathbf{0 \le \sin^2 bx \le 1}$	$\mathbf{-1 \le -\cos x \le 1}$ $\mathbf{-2 \le -\cos x - 1 \le 0}$

№12. Найти все значения параметра b, при каждом из которых уравнение имеет решения

$$\sin^2 bx + \cos x + 1 = 0$$

$$\sin^2 bx = -\cos x - 1$$

	Левая часть	*Правая часть*
2.	$0 \le \sin^2 bx \le 1$	$-1 \le -\cos x \le 1$ $-2 \le -\cos x - 1 \le 0$
3.	$f_{\text{наим}} = 0$	$g_{\text{наиб}} = 0$

№12. Найти все значения параметра b, при каждом из которых уравнение имеет решения

$$\sin^2 bx + \cos x + 1 = 0$$

$$\begin{cases} \sin^2 bx = 0 \\ -\cos x - 1 = 0 \end{cases}$$

Решаем первое уравнение:

$$\sin^2 bx = 0$$

$$\sin bx = 0$$

№12. Найти все значения параметра b, при каждом из которых уравнение имеет решения

Решаем первое уравнение:

$$\sin^2 bx = 0$$
$$\sin bx = 0$$

$b = 0$	$b \neq 0$
$\sin(0 \cdot x) = 0$ x – любое	$\sin bx = 0$ $bx = \pi n, n \epsilon Z$ $x = \frac{\pi n}{b}, n \epsilon Z$

№12. Найти все значения параметра b, при каждом из которых уравнение имеет решения

$$\sin^2 bx + \cos x + 1 = 0$$

$$\begin{cases} \sin^2 bx = 0 \\ -\cos x - 1 = 0 \end{cases}$$

Решаем второе уравнение:

$$-\cos x - 1 = 0$$

$$\cos x = -1$$

$$\boldsymbol{x = \pi + 2\pi k, k \epsilon Z}$$

№12. Найти все значения параметра b, при каждом из которых уравнение имеет решения

$$\sin^2 bx + \cos x + 1 = 0$$

$$\begin{cases} \sin^2 bx = 0 \\ -\cos x - 1 = 0 \end{cases} <=> \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \boldsymbol{b = 0, x -} \text{любое} \\ \boldsymbol{b \neq 0, x = \dfrac{\pi n}{b}, n \epsilon Z} \end{array} \right. \\ \boldsymbol{x = \pi + 2\pi k, k \epsilon Z} \end{cases}$$

№12. Найти все значения параметра b, при каждом из которых уравнение имеет решения

$$\sin^2 bx + \cos x + 1 = 0$$

Находим решения системы:

$$\begin{cases} \sin^2 bx = 0 \\ -\cos x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \boldsymbol{b = 0, x} - \text{любое} \\ b \neq 0, x = \dfrac{\pi n}{b}, n \epsilon Z \end{array} \right. \\ \boldsymbol{x = \pi + 2\pi k, k \epsilon Z} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{b = 0 \Rightarrow x = \pi + 2\pi k, k \epsilon Z}$$

№12. Найти все значения параметра b, при каждом из которых уравнение имеет решения

$$\sin^2 bx + \cos x + 1 = 0$$

Находим решения системы:

$$\begin{cases} \sin^2 bx = 0 \\ -\cos x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} b = 0, x - \text{любое} \\ b \neq 0, x = \dfrac{\pi n}{b}, n \epsilon Z \end{array} \right. \\ x = \pi + 2\pi k, k \epsilon Z \end{cases}$$

$$\frac{\pi n}{b} = \pi + 2\pi k, n\epsilon Z, k\epsilon Z$$

$$\pi n = \pi b(1 + 2k), n\epsilon Z, k\epsilon Z \Rightarrow b = \frac{n}{1 + 2k}$$

№12. Найти все значения параметра b, при каждом из которых уравнение имеет решения

$$\sin^2 bx + \cos x + 1 = 0$$

Обобщаем результаты:

$b = 0$	$b = \dfrac{n}{1+2k}, n \epsilon Z, k \epsilon Z$
$x = \pi + 2\pi k, k \epsilon Z$	$x = \dfrac{\pi n}{b} = \dfrac{\pi n(1+2k)}{n}$ $x = \pi(1+2k)$ $x = \pi + 2\pi k, k \epsilon Z$

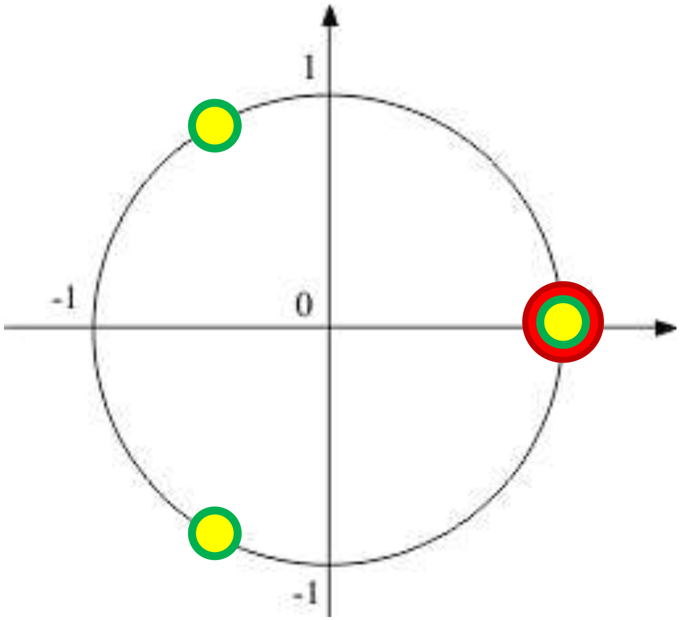
Ответ: $b = \frac{n}{1+2k}, n \in Z, k \in Z$

№10. Решить уравнение:

$$\cos x + \cos 3x = 2$$

Заметим, что: $\cos x + \cos 3x \le 2$

$$\begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos 3x = 1 \end{cases} <=> \begin{cases} x = 2\pi n, n\epsilon Z \\ 3x = 2\pi k, k\epsilon Z \end{cases} <=> \begin{cases} \boldsymbol{x = 2\pi n}, n\epsilon Z \\ \boldsymbol{x = \frac{2\pi k}{3}}, k\epsilon Z \end{cases}$$



Ответ: $x = 2\pi + 2\pi n, n\epsilon Z$

Задание для самостоятельной работы:

Решите уравнение:

$$\sin\frac{5x}{2} + \cos 6x = 2$$

Задание для самостоятельной работы:

Решите уравнение:

$$\sin\frac{5x}{2} + \cos 6x = 2$$

Ответ: $x = \pi + 4\pi n, n \in Z$

№11. Решить уравнение:

$$5\sin 2x - \sin 6x + 6 = 0$$

$$5\sin 2x + 6 = \sin 6x$$

	Левая часть	*Правая часть*
1.	$5\sin 2x + 6$	$\sin 6x$
2.	$5\sin 2x + 6$	$\sin 6x$
	$-1 < \sin 2x < 1$	$-1 < \sin 6x < 1$

№11. Решить уравнение:

$$5\sin 2x - \sin 6x + 6 = 0$$

$$5\sin 2x + 6 = \sin 6x$$

$$\begin{cases} 5\sin 2x + 6 = 1 \\ \sin 6x = 1 \end{cases} <=> \begin{cases} \boldsymbol{x = -\frac{\pi}{4} + \pi n}, n \epsilon Z \\ \boldsymbol{x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}}, k \epsilon Z \end{cases}$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \epsilon Z$